

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>I</b>
1.1 Spezielle Funktionen in der Vorlesung . . . . .	I
1.2 Mathematische Theorien und Konzepte . . . . .	I
1.3 Kurzübersicht . . . . .	II
1.3.1 Algebraische Operationen im Komplexen . . . . .	II
1.3.2 Exponentialfunktion, Winkelfunktionen, hyperbolische Win- kelfunktionen, abgeleitete Funktionen . . . . .	II
1.3.3 Gammafunktion, Betafunktion . . . . .	V
1.3.4 Hypergeometrische Funktionen . . . . .	VI
1.3.5 Besselfunktion, Legendrefunktion, Laguerre-Funktion, Tscheybyscheff-Funktion, Hermitesche Funktion, Jacobische hypergeometrische Funktion . . . . .	VII
1.3.6 Elliptische Funktionen, Thetafunktionen . . . . .	VIII
1.3.7 Zahlentheoretische Funktionen . . . . .	XI
1.3.8 Riemannsches Zetafunktion, Riemannsches Vermutung . . . . .	XI

## 1 Einführung

### 1.1 Spezielle Funktionen in der Vorlesung

- (i) Algebraische Operationen im Komplexen
- (ii) Exponentialfunktion, Winkelfunktionen, hyperbolische Winkelfunktionen, abgeleitete Funktionen
- (iii) Gammafunktion, Betafunktion
- (iv) Hypergeometrische Funktion
- (v) Besselfunktion, Legendrefunktion, Laguerre-Funktion, Tscheybyscheff-Funktion, Hermitesche Funktion, Jacobische hypergeometrische Funktion
- (vi) Elliptische Funktionen, Thetafunktionen
- (vii) Zahlentheoretische Funktionen
- (viii) Riemannsches Zetafunktion

### 1.2 Mathematische Theorien und Konzepte

- (i) (komplexe) Funktionentheorie
- (ii) unendliche Produkte
- (iii) Differentialgleichungen (gewöhnliche, partielle)
- (iv) Funktionalgleichungen

- (v) Integraldarstellungen
- (vi) Entwicklungssätze, Eigenwertgleichungen (Funktionen in Raum und Zeit auf geometrischen Objekten wie Kugel, Zylinder)
- (vii) erzeugende Funktionen (Taylorreihe eine Funktion in zwei Variablen, Entwicklung nach einer Variablen, Koeffizienten hängen von anderer Variablen ab)
- (viii) Additionstheoreme
- (ix) Fouriertransformation
- (x) Transformationsgruppen, Matrizzengruppen

## 1.3 Kurzübersicht

### 1.3.1 Algebraische Operationen im Komplexen

- Berechnungen in  $\mathbb{C}$  als Körper
- Berechnungen von Potenzen mit Formel von de Moivre:

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$$

- Beweis mit Euler-Formel

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

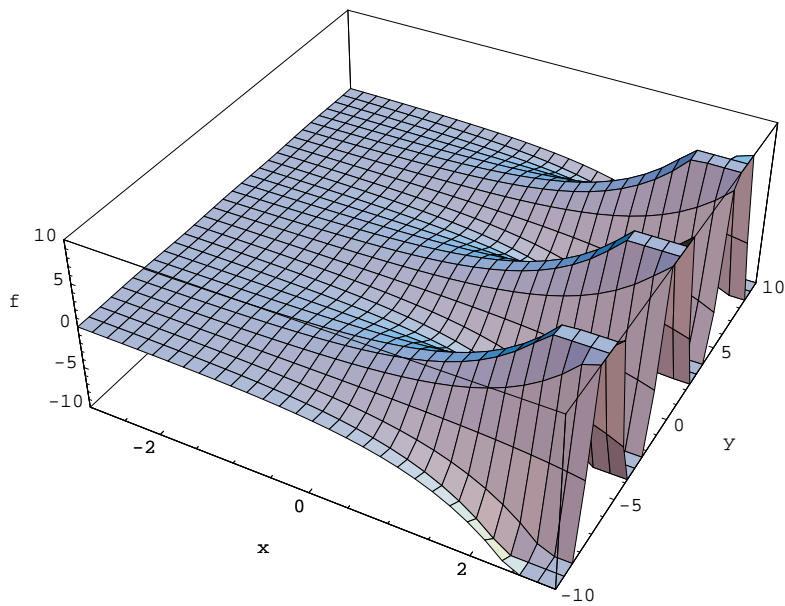
Folgerung: Berechnungen in  $\mathbb{C}$  führen direkt zu Exponentialfunktion und Winkelfunktionen

### 1.3.2 Exponentialfunktion, Winkelfunktionen, hyperbolische Winkelfunktionen, abgeleitete Funktionen

Die Exponentialfunktion kann für reelle und komplexe Zahlen sowie für Matrizen definiert werden. Ausgangspunkt dazu kann die Taylorreihe sein:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Beispiel zur Exponentialfunktion (Realteil) im Komplexen, erzeugt mit Mathematica:



```
exp1 = Plot3D[Re[E^(x + I y)], {x, -3, 3}, {y, -10, 10},
PlotPoints -> 30, PlotRange -> {-10, 10},
ImageSize -> {400, 300}, AxesLabel -> {"x", "y", "f"}]
```

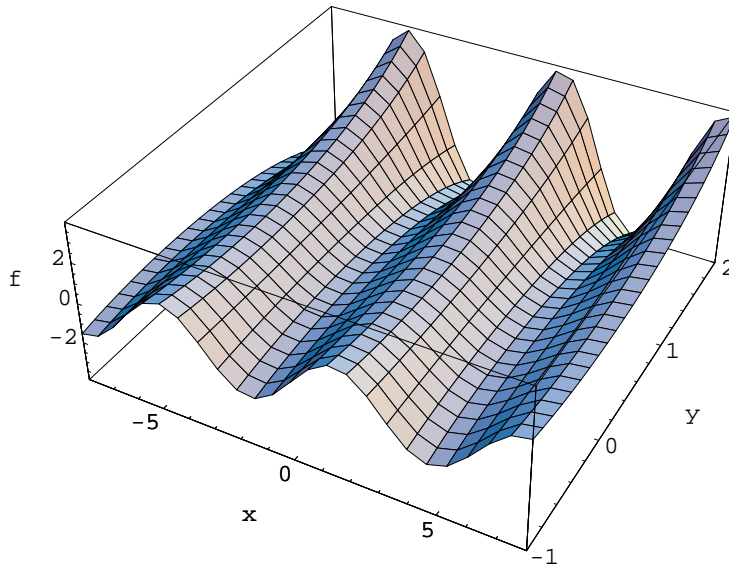
Ausgehend von der komplexen Exponentialfunktion können die komplexen Sinus- und Kosinusfunktionen definiert werden:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2}$$

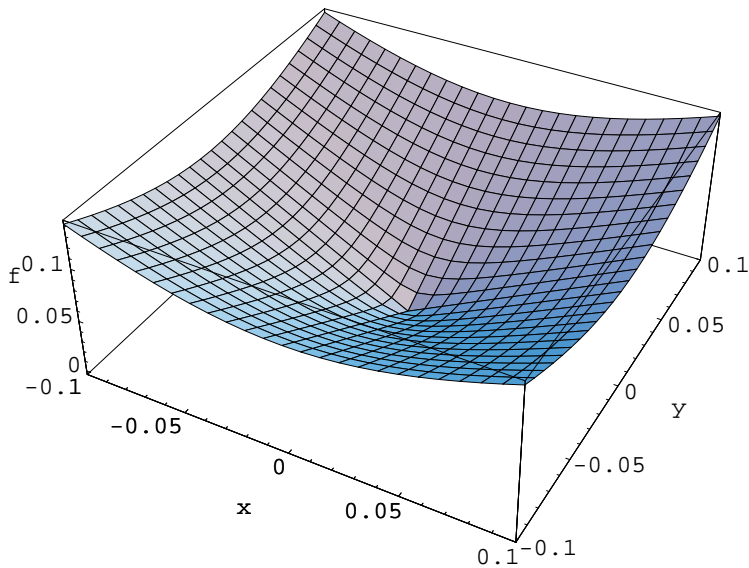
Bei diesem Zugang bleibt die Periodizität im Reellen zu zeigen. Das Gleiche gilt bei der Definition durch Taylorreihen.

Beispiel 1 zur Sinusfunktion (Realteil) im Komplexen:



```
sin1 = Plot3D[Re[Sin[x + I y]], {x, -8, 8}, {y, -1, 2},
ImageSize -> {350, 230}, AxesLabel -> {"x", "y", "f"}]
```

Beispiel 2 zur Sinusfunktion (Absolutwert) im Komplexen:



```
sin1 = Plot3D[Abs[Sin[x + I y]], {x, -0.1, 0.1}, {y, -0.1, 0.1},
ImageSize -> {350, 230}, AxesLabel -> {"x", "y", "f"}]
```

### 1.3.3 Gammafunktion, Betafunktion

Gammafunktion als Verallgemeinerung der Fakultät:  $\Gamma(n + 1) = n!$

Verallgemeinerung durch Integral (Eulersches Integral zweiter Gattung):

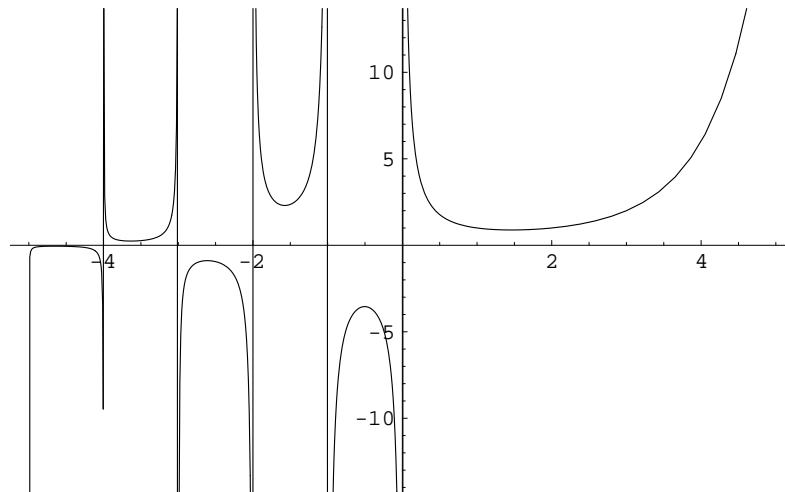
$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx \quad \text{für } \operatorname{Re}(z) > 0$$

Produktdarstellung:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$$

für  $x \in \mathbb{R}, x > 0$

Beispiel zur Gammafunktion im Reellen:

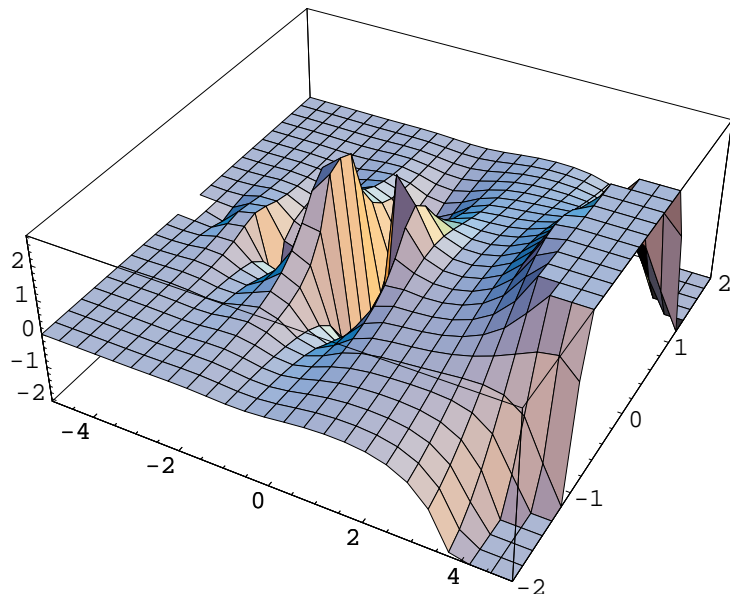


```
gamma1 = Plot[Gamma[x], {x, -5, 5}, ImageSize -> {350, 230}]
```

Sterlingsche Näherungsformel:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Beispiel zur Gammafunktion im Komplexen:



```
gamma2 = Plot3D[Re[Gamma[x + I y]], {x, -5, 5}, {y, -2, 2},
ImageSize -> {350, 230}]
```

Definition der Betafunktion mit Gammafunktion:

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

Definition der Betafunktion durch Integral:

$$B(a, b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

### 1.3.4 Hypergeometrische Funktionen

Pochhammer-Symbol:

$$(a)_k = \frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)} = a(a+1)\dots(a+k-1)$$

Potenzreihendefinition der hypergeometrischen Funktion:

$$F(a, b, c, z) = {}_2F_1(a, b, c, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!}$$

allgemeiner:

$${}_mF_n(a_1, \dots, a_m; b_1, \dots, b_n; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k \dots (a_m)_k}{(b_1)_k \dots (b_n)_k} \frac{z^k}{k!}$$

Beispiele:

$$(i) {}_0F_0(;;z) = e^z$$

$$(ii) {}_1F_0(-a;;-z) = (1+z)^a$$

$$(iii) {}_0F_1\left(;;\frac{1}{2};-\frac{z^2}{4}\right) = \cos z$$

$$(iv) {}_0F_1\left(;;\frac{3}{2};-\frac{z^2}{4}\right) = \frac{\sin z}{z}$$

$$(v) {}_2F_1(1, 1; 2; -z) = \frac{1}{z} \ln(1+z)$$

$$(vi) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{2z} \ln \frac{1+z}{1-z}$$

$$(vii) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; z^2\right) = \frac{1}{z} \arcsin z$$

$$(viii) {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -z^2\right) = \frac{1}{z} \arctan z$$

$w = {}_2F_1(a, b, c, z)$  ist Lösung der hypergeometrischen Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \frac{c - (a+b+1)z}{z(1-z)} \frac{dw}{dz} - \frac{ab}{z(1-z)} w = 0$$

und kann als Integral definiert werden:

$${}_2F_1(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1} (1-t)^{c-b-1} (1-zt)^{-a} dt$$

Es gilt

$$\frac{d}{dz} F(a, b, c, z) = \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, z)$$

### 1.3.5 Besselfunktion, Legendrefunktion, Laguerre-Funktion, Tscheybyscheff-Funktion, Hermitesche Funktion, Jacobische hypergeometrische Funktion

Potenzreihendefinition der Besselfunktionen:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

Integraldarstellung der Besselfunktionen:

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(z - \sin \phi - n\phi) d\phi$$

erzeugende Funktion:

$$e^{\frac{z}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z) t^n$$

Rekursionsformel:

$$J_{n+1}(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J'_n(z)$$

Differentialgleichung:

$$J_n''(z) + \frac{1}{z} J_n'(z) + \left(1 - \frac{n^2}{z^2}\right) J_n(z) = 0$$

Physikalischer Hintergrund ist eine Membranschwingung. Diese kann durch die partielle Differentialgleichung

$$c^2 \left( \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

beschrieben werden.

Spezielle Funktionswerte:

$$(i) J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$$

$$(ii) J_{3/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left( \frac{\sin z}{z} - \cos z \right)$$

Additionstheorem:

$$J_n(x+y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(x) J_{n-m}(y)$$

Orthogonalität:

$$\int_0^{\infty} z J_n(\alpha z) J_n(\beta z) dz = 0$$

für  $|\alpha| \neq |\beta|$ ,  $n$  ganzzahlig.

### 1.3.6 Elliptische Funktionen, Thetafunktionen

Die Funktionen  $x(t) = \sin t$ ,  $y(t) = \cos t$  können durch das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) \\ y'(t) &= -x(t) \end{aligned}$$

mit den Anfangswerten  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$  beschrieben werden. Durch Einführung eines zusätzlichen Parameters  $k$  mit  $0 \leq k \leq 1$  kann obiges System zu

$$\begin{aligned} x'(t) &= y(t) z(t) \\ y'(t) &= -x(t) z(t) \\ z'(t) &= k^2 x(t) y(t) \end{aligned}$$

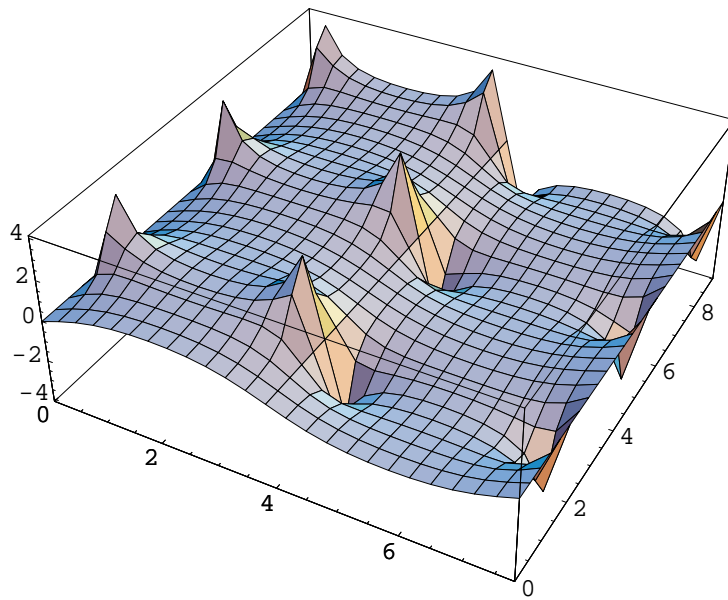
verallgemeinert werden mit den Anfangswerten  $x(0) = 0$ ,  $y(0) = 1$  und  $z(0) = 1$ .  $k = 0$  führt wieder zu obigem System.

Die reellen Lösungen dieses Systems können wie bei den Winkelfunktionen zu differenzierbaren Funktionen einer komplexen Variablen  $t$  verallgemeinert werden. Im Gegensatz zu den Winkelfunktionen entstehen dabei doppelt periodische



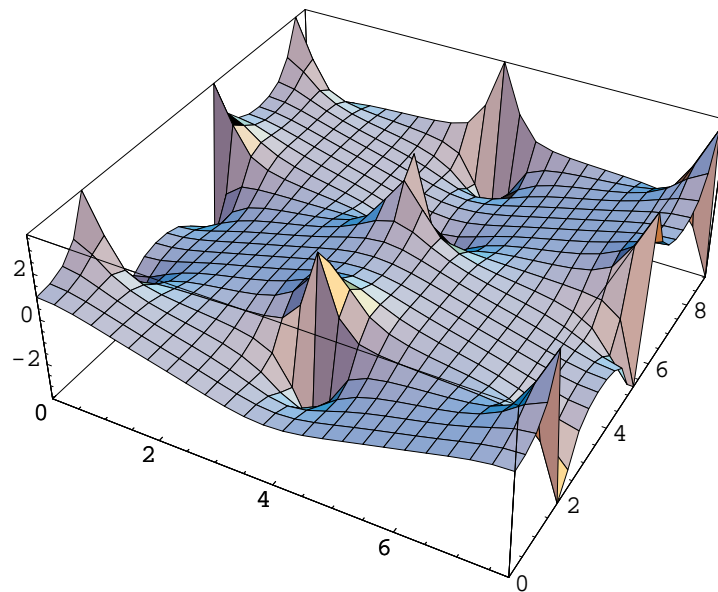
Funktionen.

Realteil der Jacobischen Sinusfunktion zu  $k=3/5$ :



```
k = 3/5; k' = 4/5;  
K = EllipticK[k]; K' = EllipticK[k'];  
jacobi1 = Plot3D[Re[JacobiSN[x + I y, k]],  
{x, 0, 4 K}, {y, 0, 4 K'}, ImageSize -> {350, 230}]
```

Realteil der Jacobischen Kosinusfunktion zu  $k=3/5$ :



```

k = 3/5; k' = Sqrt[1 - k^2];
K = EllipticK[k]; K' = EllipticK[k'];
jacobi2 = Plot3D[Re[JacobiCN[x + I y, k]],
{x, 0, 4 K}, {y, 0, 4 K'}], ImageSize -> {350, 230}

```

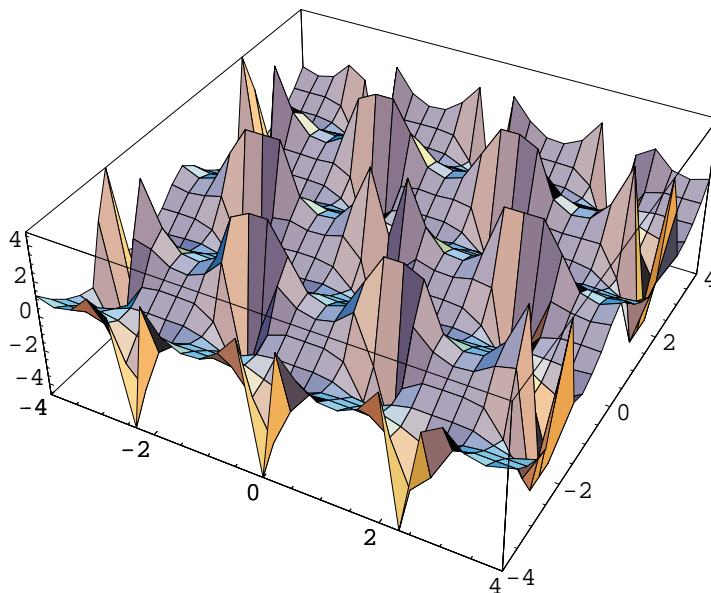
Ein anderer Zugang zu den elliptischen Funktionen beginnt mit Umkehrfunktionen zu elliptischen Integralen:

$$s(v) = \int_0^v \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du$$

Die Weierstraßsche P-Funktion  $\wp(z)$  ist eine weitere doppelt periodische Funktion. In Verallgemeinerung einer Taylorreihe wird dazu eine Summe über ein im Komplexen durch zwei linear unabhängige Vektoren aufgespanntes Perioden-Gitter  $\Gamma$  summiert:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right)$$

Beispiel zum Realteil der Weierstraßschen P-Funktion:



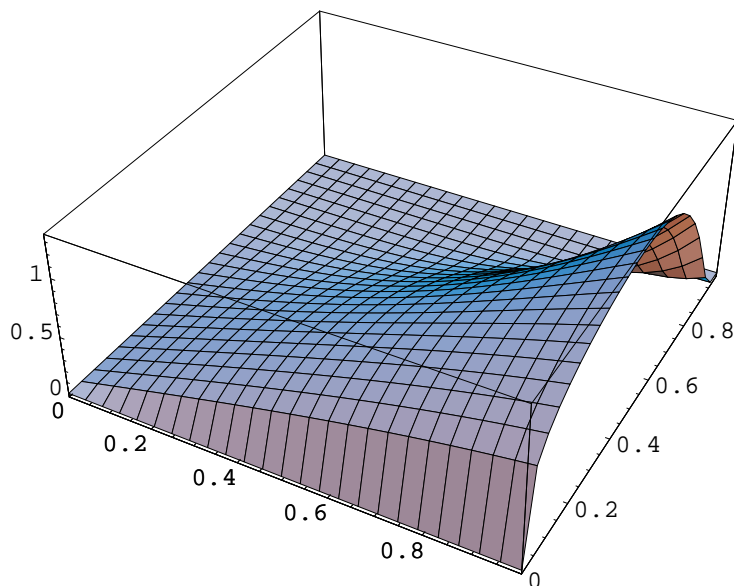
Wir können eine Thethafunktion definieren durch:

$$\vartheta(z, \tau) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z}$$

Ein Hintergrund dazu sind schnell konvergierende Reihen zur Berechnung elliptischer Funktionen. Üblich sind auch davon abgeleitete Funktionen  $\vartheta_i(z, \tau)$  ( $i=1,2,3,4$ ), z.B.:

$$\vartheta_1(z, \tau) = e^{\pi i \frac{\tau}{4} + \pi i (z + \frac{1}{2})} \vartheta\left(z + \frac{\tau + 1}{2}, \tau\right) = i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i (n + \frac{1}{2})^2 \tau + 2\pi i (n + \frac{1}{2}) z}$$

Als Beispiel erhalten wir für den Realteil dieser Thetafunktion in Abhängigkeit von  $z$  und  $\tau$ :



```
theta1 = Plot3D[Re[EllipticTheta[1, z,t]], {z, 0, 0.999},
{t, 0, 0.999}, ImageSize -> {350, 230}]
```

### 1.3.7 Zahlentheoretische Funktionen

Zahlentheoretische Funktionen ordnen jeder positiven natürlichen Zahl einen Funktionswert aus den komplexen Zahlen zu. Diese Funktionen dienen in der Zahlentheorie dazu, Eigenschaften von natürlichen Zahlen, besonders deren Teilbarkeit zu beschreiben und zu untersuchen.

Beispiele zahlentheoretischer Funktionen:

- (i) identische Funktion  $I(n) = n$
- (ii) Die Teileranzahlfunktion  $d(n)$  gibt an, wie viele Teiler die Zahl  $n$  besitzt.
- (iii) Teilersummenfunktion, d.h. Summe aller Teiler:  $\sigma(n) := \sum_{d|n} d$
- (iv) Die Eulersche  $\phi(n)$ -Funktion gibt die Anzahl der zu  $n$  teilerfremden natürlichen Zahlen an, die nicht größer als  $n$  sind.
- (v) Die Primzahlfunktion  $p(n)$  gibt die Anzahl der Primzahlen an, die nicht größer als  $n$  sind.

### 1.3.8 Riemannsche Zetafunktion, Riemannsche Vermutung

Für komplexe Zahlen  $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$  mit  $\sigma > 1$  ist die Zeta-Funktion definiert durch die Dirichlet-Reihe

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s} + \dots$$

Diese Funktion läßt sich auf eine in ganz  $\mathbb{C}$  meromorphe Funktion fortsetzen. Große Bedeutung erlangt die Riemannsche Zeta-Funktion durch den Zusammenhang zwischen der Lage ihrer komplexen Nullstellen und der Verteilung der Primzahlen. Euler bewies die Faktorisierung

$$\zeta(s) = \prod_{p \text{ prim}} \left( 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \dots \right) = \prod_{p \text{ prim}} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} \right)$$

Es gilt die Identität

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos \frac{\pi s}{2} \Gamma(s) \zeta(s).$$

Die „trivialen“ Nullstellen der Zetafunktion sind  $-2, -4, -6, \dots$ . Neben den trivialen Nullstellen besitzt die Zeta-Funktion weitere sogenannte nicht triviale Nullstellen im kritischen Streifen  $S = \{s \in \mathbb{C} \mid 1 > \operatorname{Re} s > 0\}$ .

Riemann vermutete im Jahr 1859, dass alle Nullstellen auf der parallel zur imaginären Achse verlaufenden Geraden  $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s = 1/2\}$  liegen. Diese so genannte Riemannsche Vermutung konnte bislang weder bewiesen noch widerlegt werden.